



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

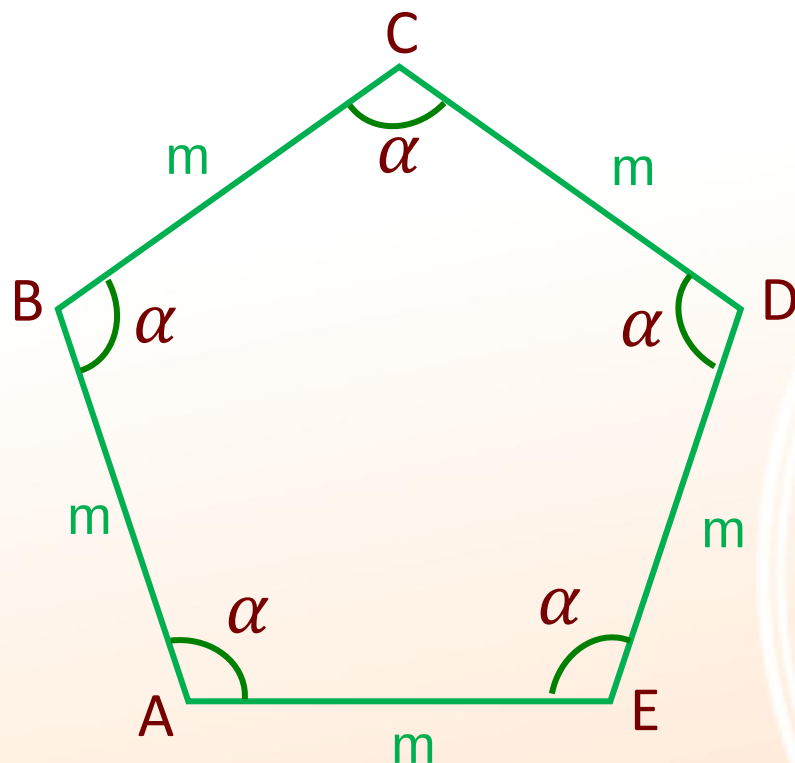
POLÍGONOS REGULARES

**CICLO
PRE
2024-1**

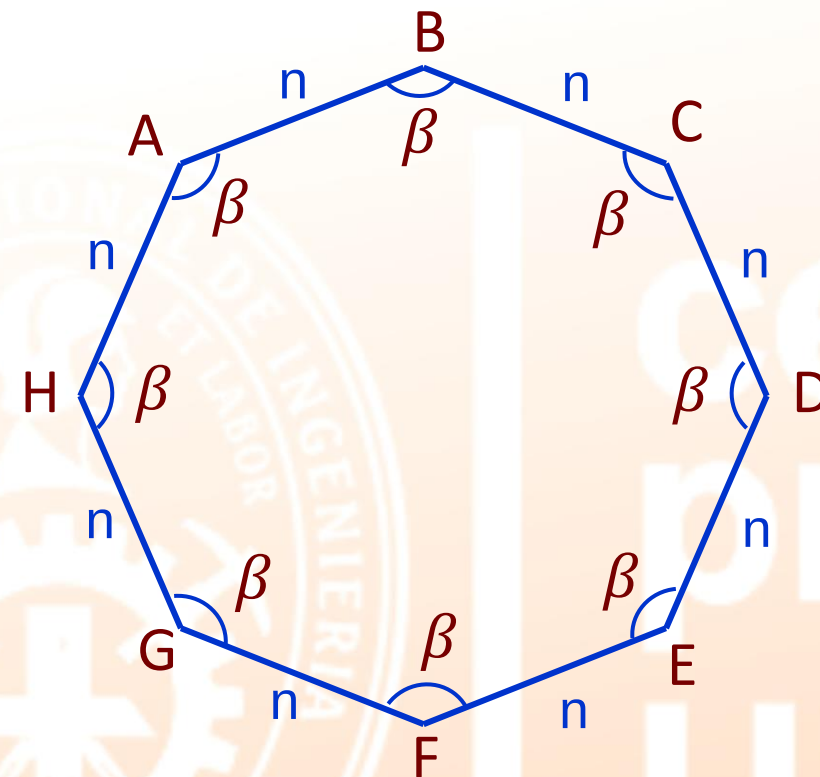


POLÍGONO REGULAR

Definición. Es el polígono convexo, equilátero y equiángulo.

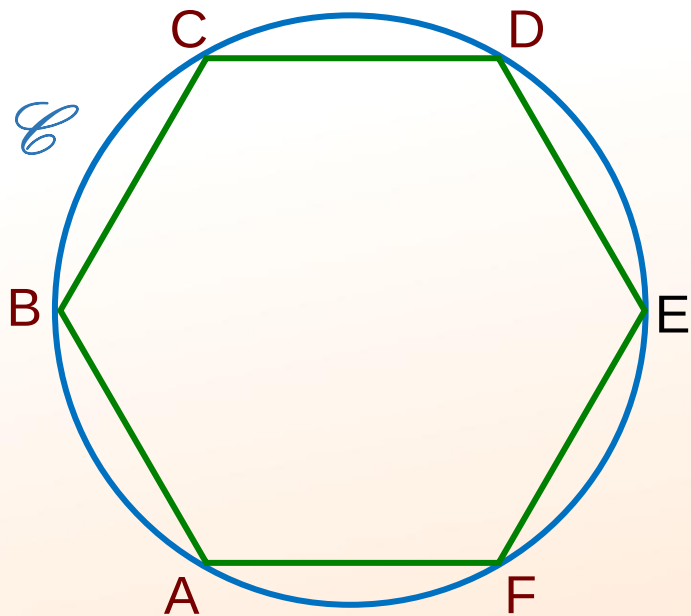


Pentágono regular ABCDE



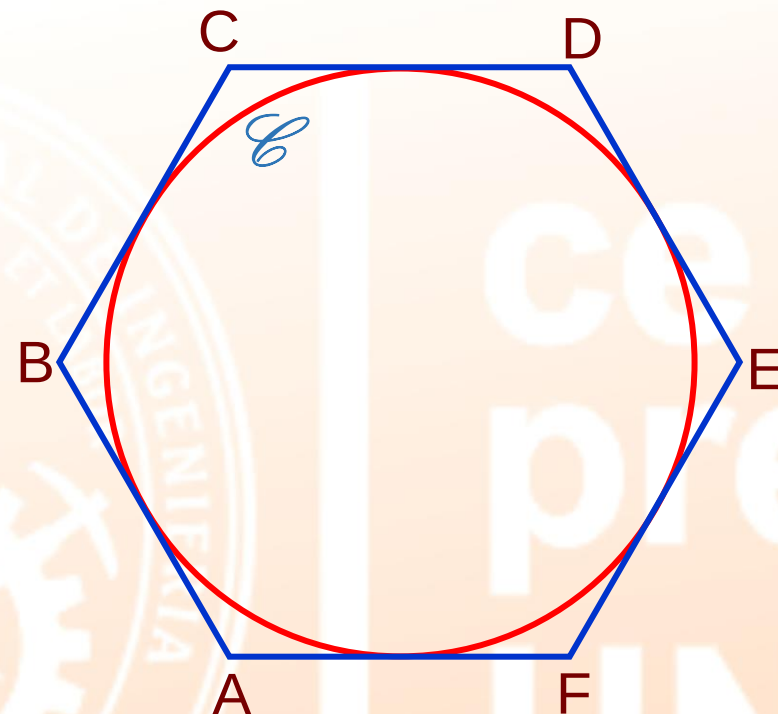
Octógono regular ABCDEFGH

Definición. Un polígono regular está inscrito en una circunferencia, si todos los vértices pertenecen a dicha circunferencia.



ABCDEF es un hexágono regular inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}$.

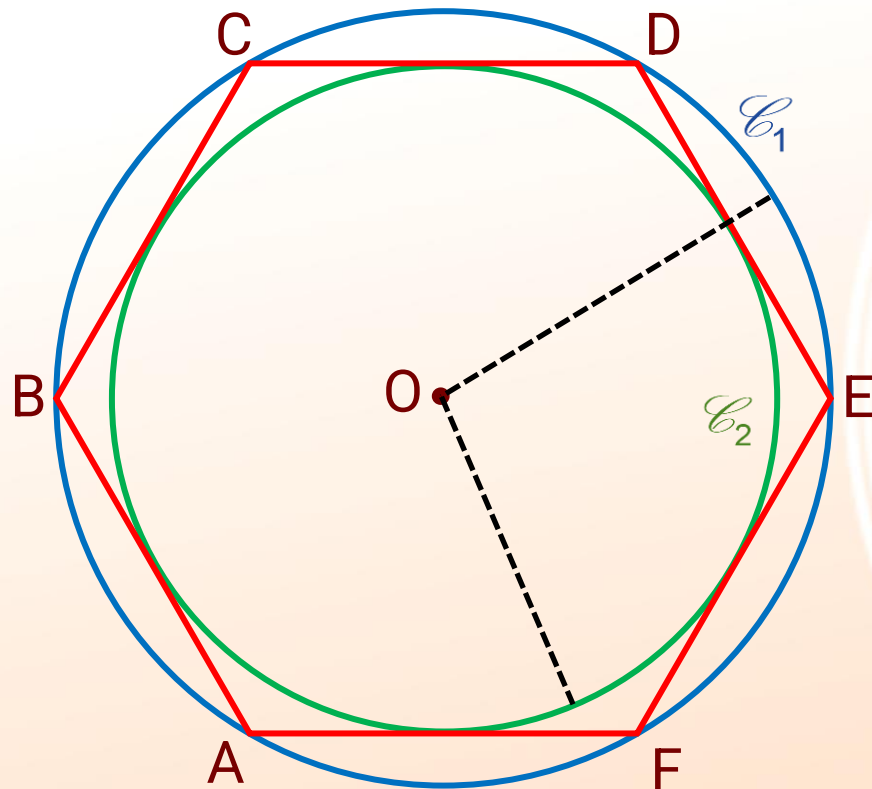
Definición. Un polígono regular está circunscrito a una circunferencia, si todos los lados son tangentes a dicha circunferencia.



ABCDEF es un hexágono regular circunscrito a la circunferencia $\mathcal{C}$.

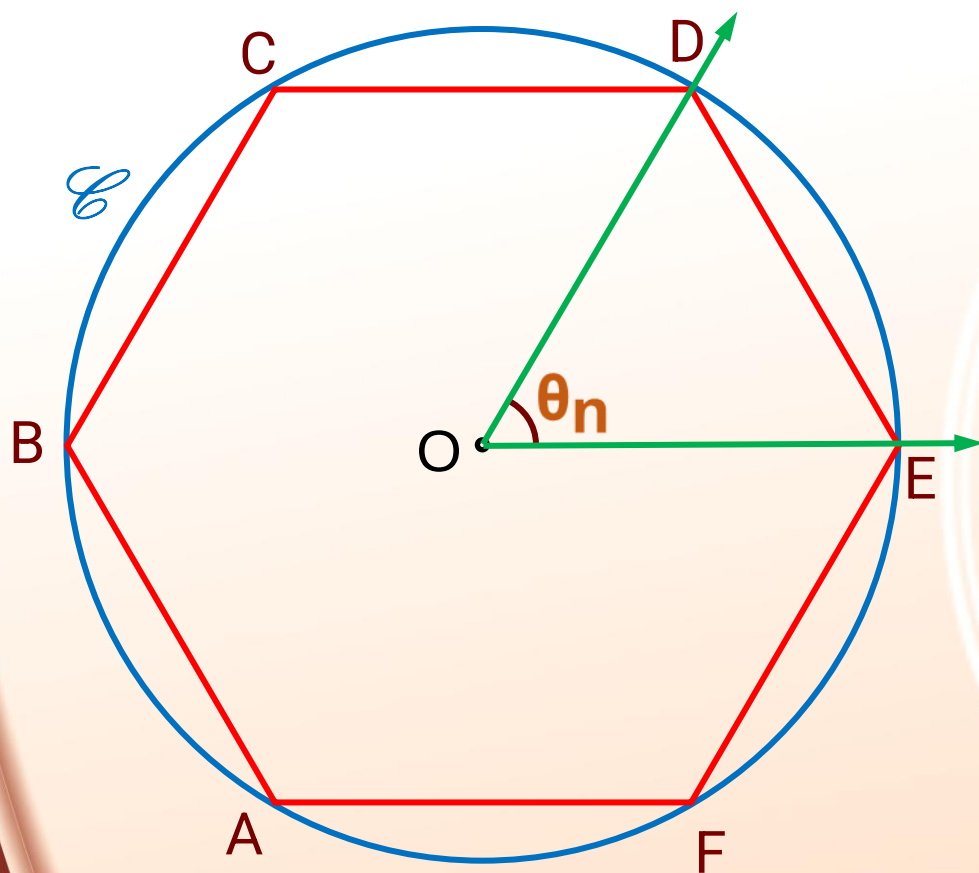
Teorema. Todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible a circunferencias concéntricas.

Definición. El centro de un polígono regular es el centro de las circunferencias inscrita o circunscrita a dicho polígono.



En el hexágono regular $ABCDEF$, O es el centro de las circunferencias concéntricas, inscrita y circunscrita al hexágono.

Definición. El ángulo central de un polígono regular, es el ángulo que tiene por vértice al centro del polígono y cuyos lados contienen a dos vértices consecutivos del polígono.

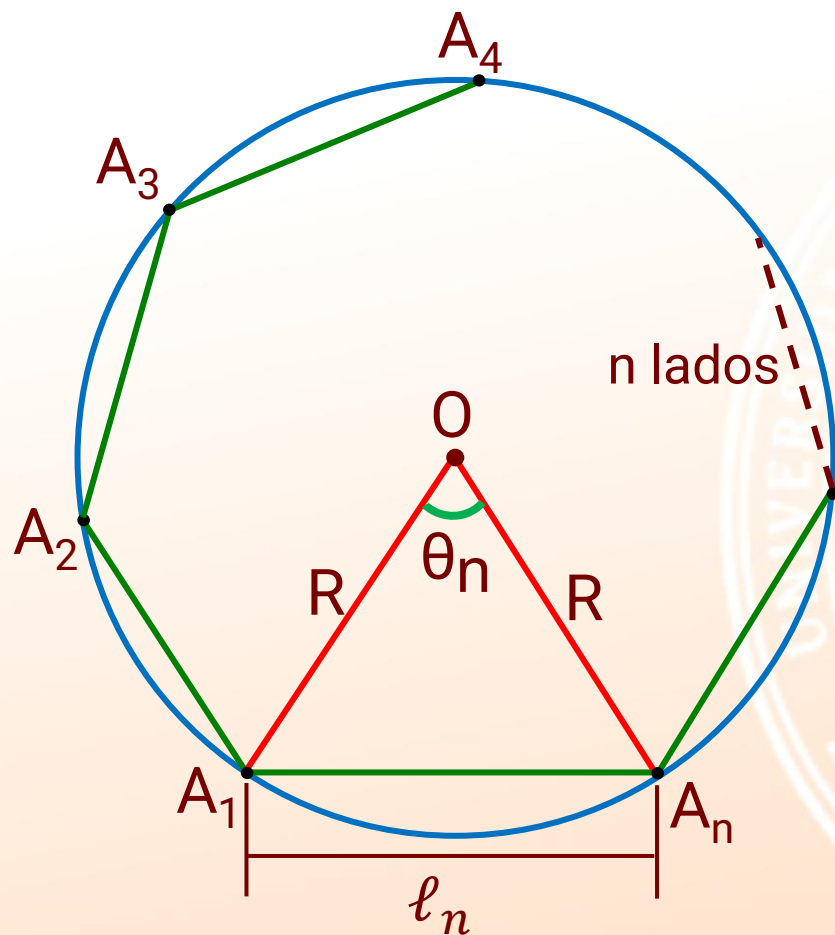


En el hexágono regular ABCDEF, el ángulo DOE es un ángulo central de vértice O.

θ_n es la medida del ángulo central del polígono regular de n lados.

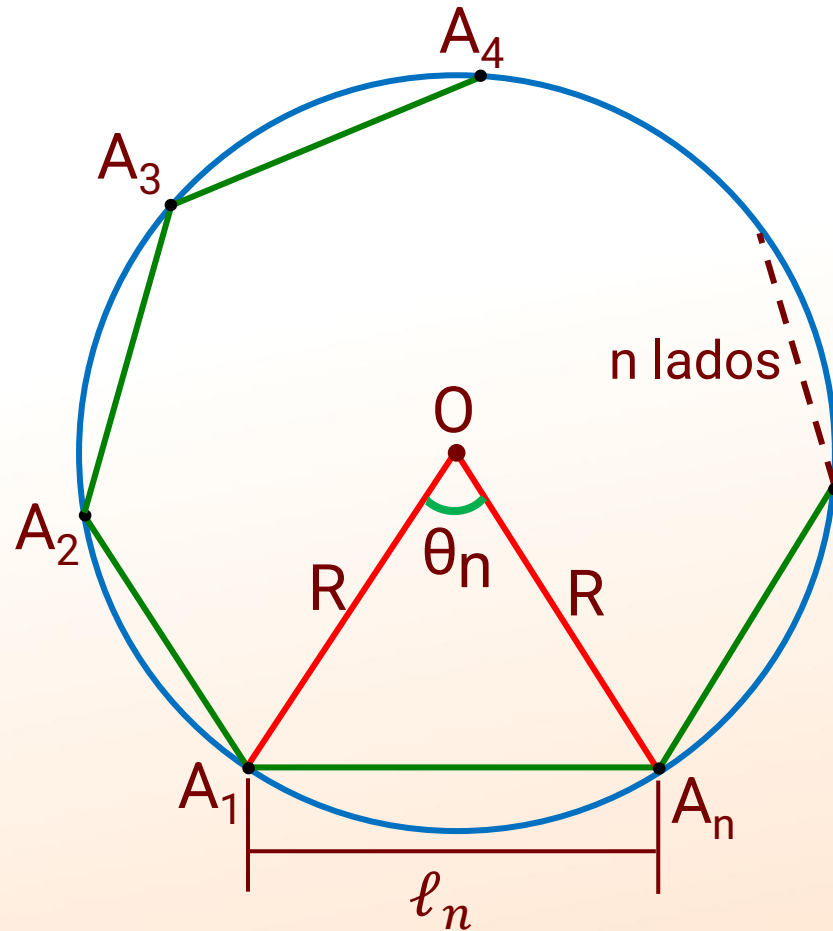
$$\theta_n = \frac{360}{n}$$

Teorema. Si R y θ_n son la longitud del circunradio y la medida del ángulo central de un polígono regular de n lados, entonces la longitud del lado del polígono regular es $\ell_n = R\sqrt{2 - 2\cos(\theta_n)}$



$$\ell_n = R\sqrt{2 - 2\cos(\theta_n)}$$

Teorema. Si R y θ_n son el circunradio y la medida del ángulo central de un polígono regular de n lados, entonces la longitud del lado del polígono regular es $\ell_n = R\sqrt{2 - 2\cos(\theta_n)}$



DEMOSTRACIÓN:

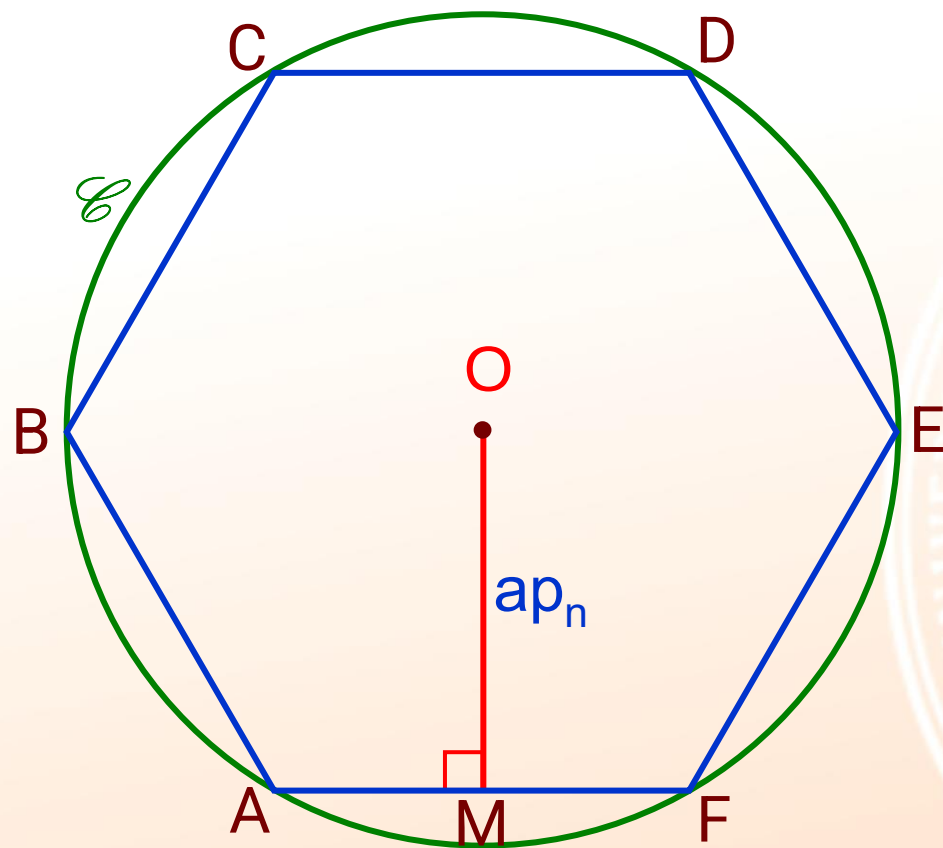
- El polígono regular $A_1A_2A_3 \dots A_n$ de n lados está inscrito en la circunferencia de centro O .
- En el triángulo isósceles A_1OA_n , teorema del coseno

$$(\ell_n)^2 = R^2 + R^2 - 2(R)(R)\cos(\theta_n)$$

- Despejando se tiene:

$$\ell_n = R\sqrt{2 - 2\cos(\theta_n)}$$

Definición. La apotema de un polígono regular, es el segmento que tiene por extremos el centro del polígono regular y el punto medio de un lado.

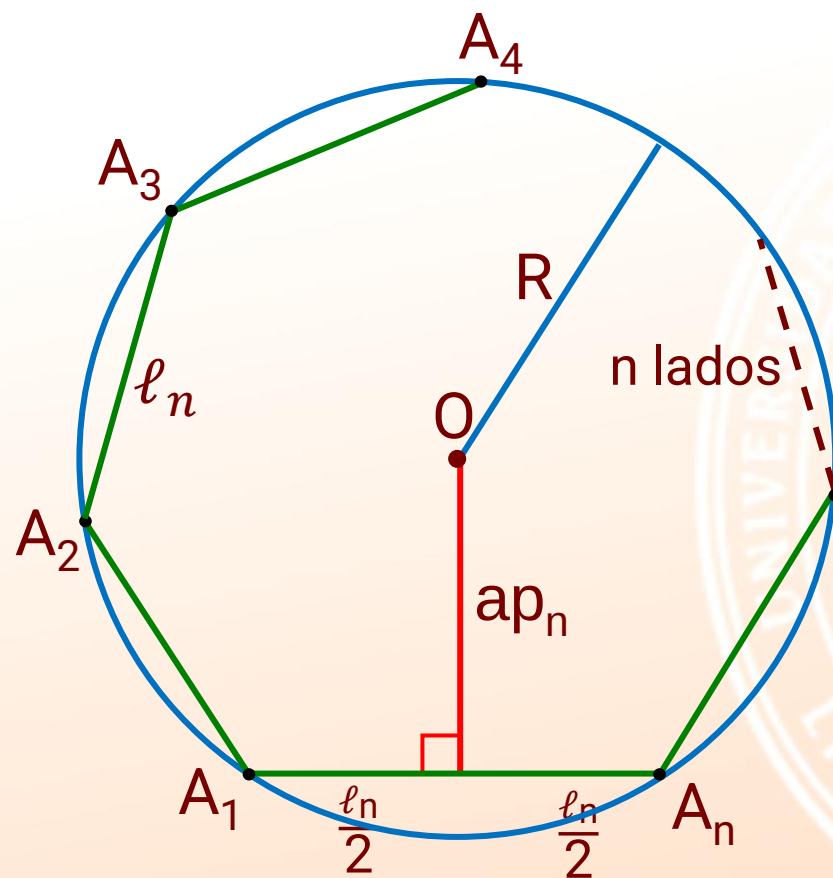


$\overline{OM}$ es la apotema del polígono regular de n lados y centro O .

ap_n es la longitud de la apotema del polígono regular de n lados

Teorema. Si ℓ_n y R son las longitudes del lado y del circunradio del polígono regular de n lados respectivamente, entonces la longitud de

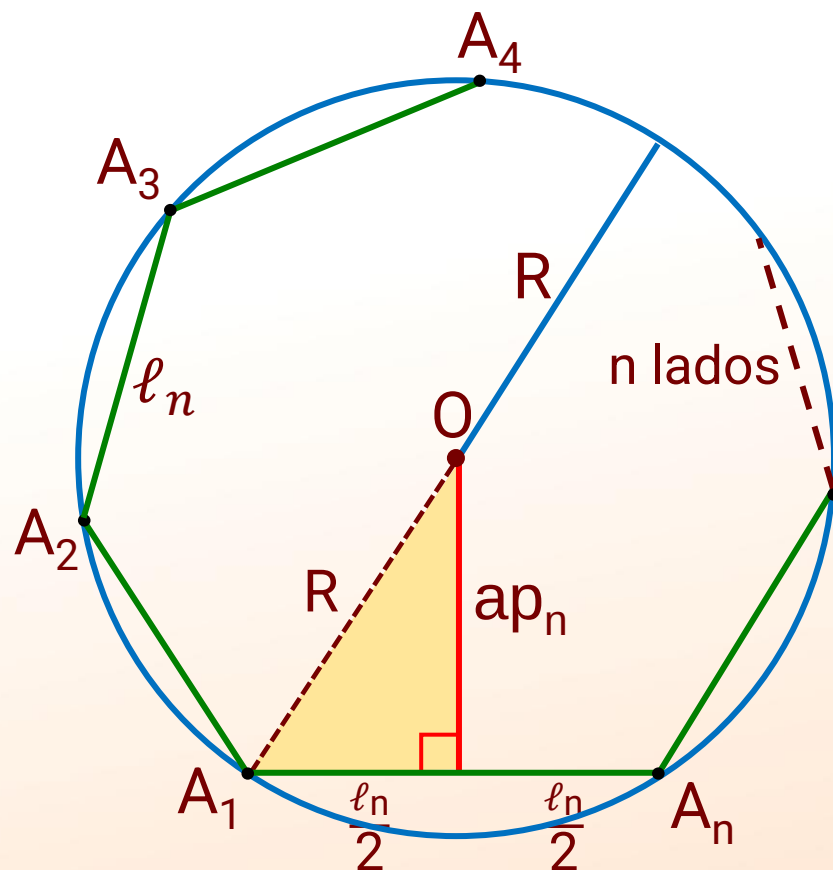
la apotema es $ap_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}$



$$ap_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}$$

Si ℓ_n y R son las longitudes del lado y del circunradio del polígono regular de n lados, respectivamente, entonces la longitud del apotema es: $ap_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}$

DEMOSTRACIÓN:



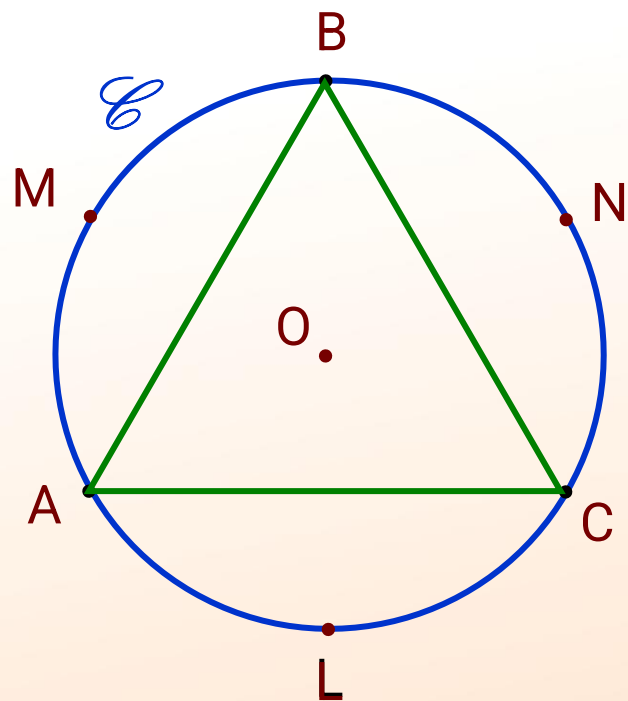
$\triangle A_1MO$: Teorema de Pitágoras

$$(ap_n)^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 = R^2$$

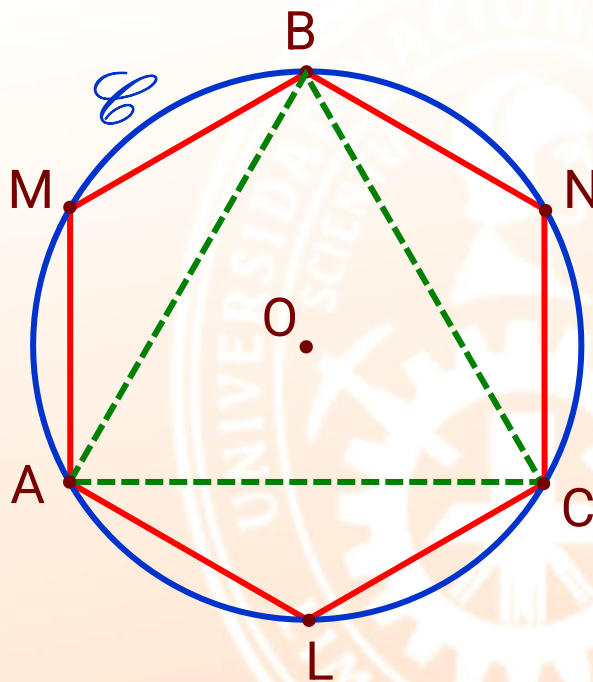
$$ap_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}$$

POLÍGONO REGULAR INSCRITO DE $2n$ LADOS

Si un polígono regular de n lados está inscrito en una circunferencia, entonces el polígono regular de $2n$ lados inscrito en la misma circunferencia, se determinará al unir los vértices del polígono de n lados con los puntos medios de los arcos que subtienden sus lados.



Triángulo equilátero

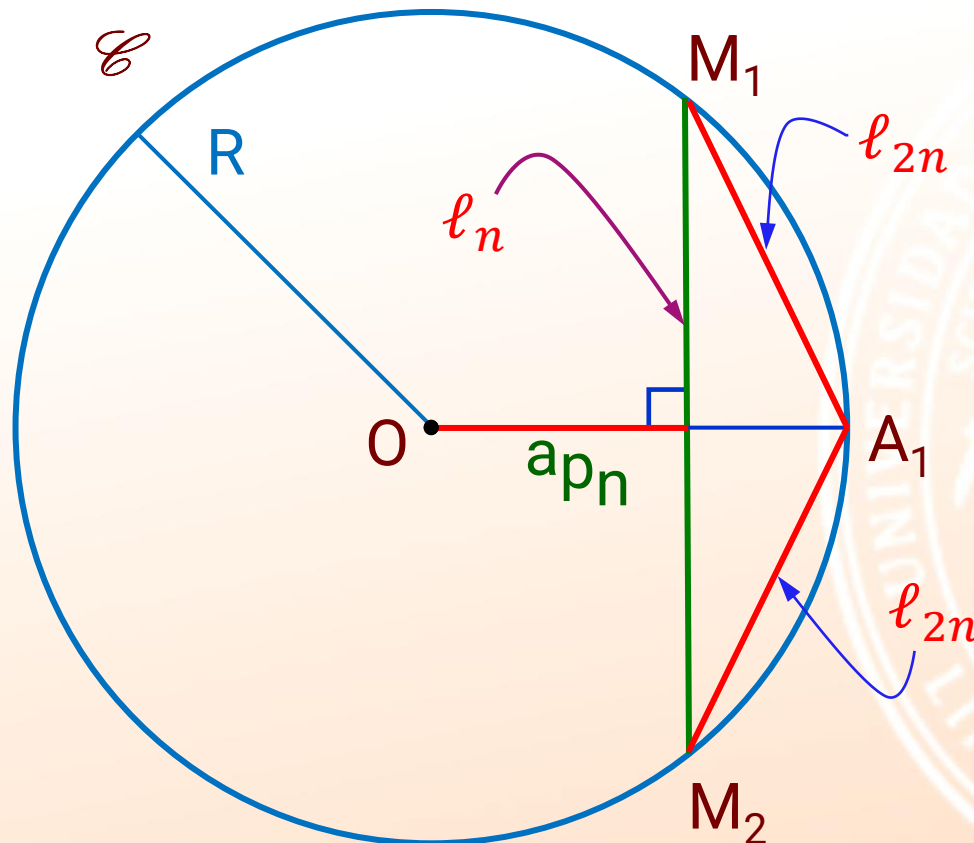


Hexágono regular

M, N y L son puntos medios de los arcos que subtienden los lados del triángulo equilátero ABC. Luego, AMBNCL es el polígono regular inscrito en C de doble número de lados.

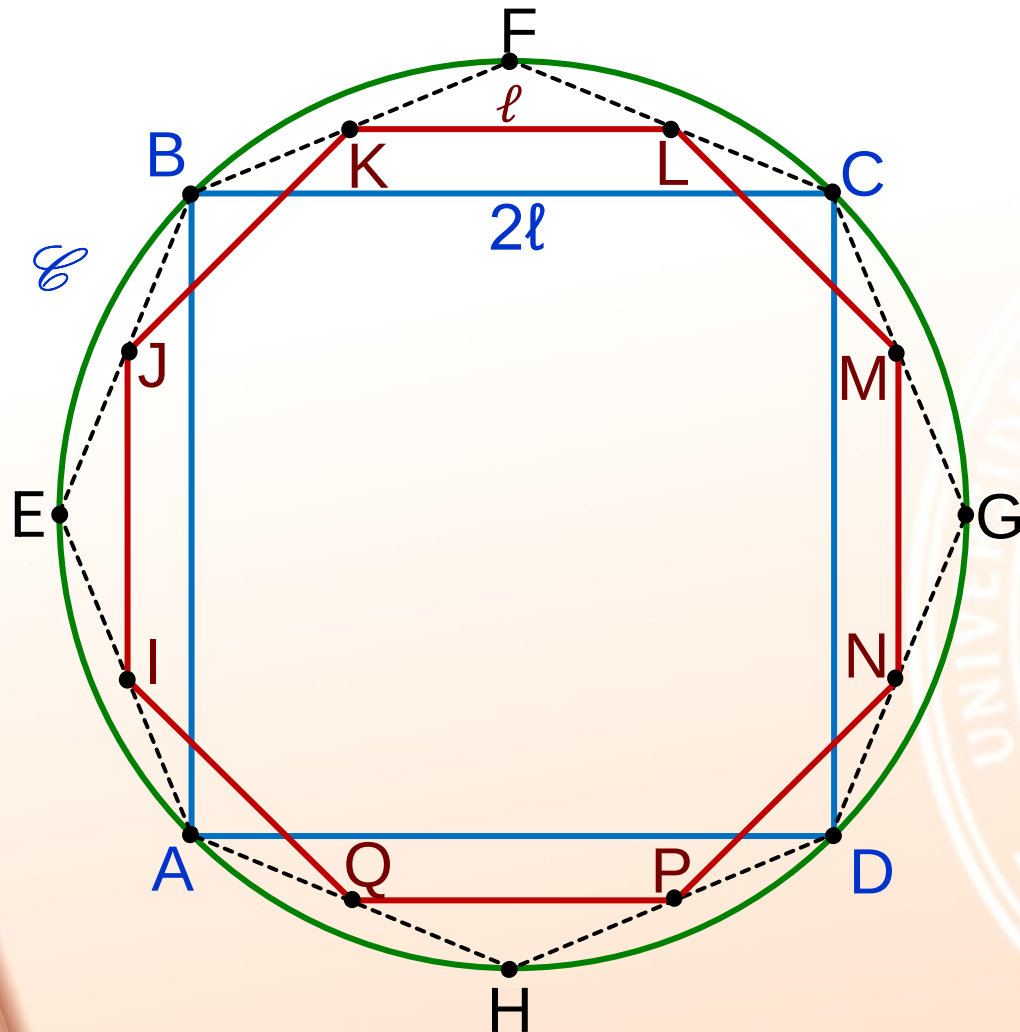
Teorema. Si ℓ_n y ℓ_{2n} son las longitudes de los lados de los polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia cuyo radio mide R , entonces la longitud del lado del polígono regular de $2n$ lados es:

$$\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}}$$



$$\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (\ell_n)^2}}$$

Definición. Dos polígonos son isoperimétricos si tienen perímetros iguales.



$ABCD$ e $IJKLMNPQ$ son polígonos regulares Isoperimétricos.

Donde I, J, K, L, M, N, P y Q son puntos medios de los lados del polígono regular $AEBFCGDH$.



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**POLÍGONOS REGULARES
NOTABLES INSCRITOS**

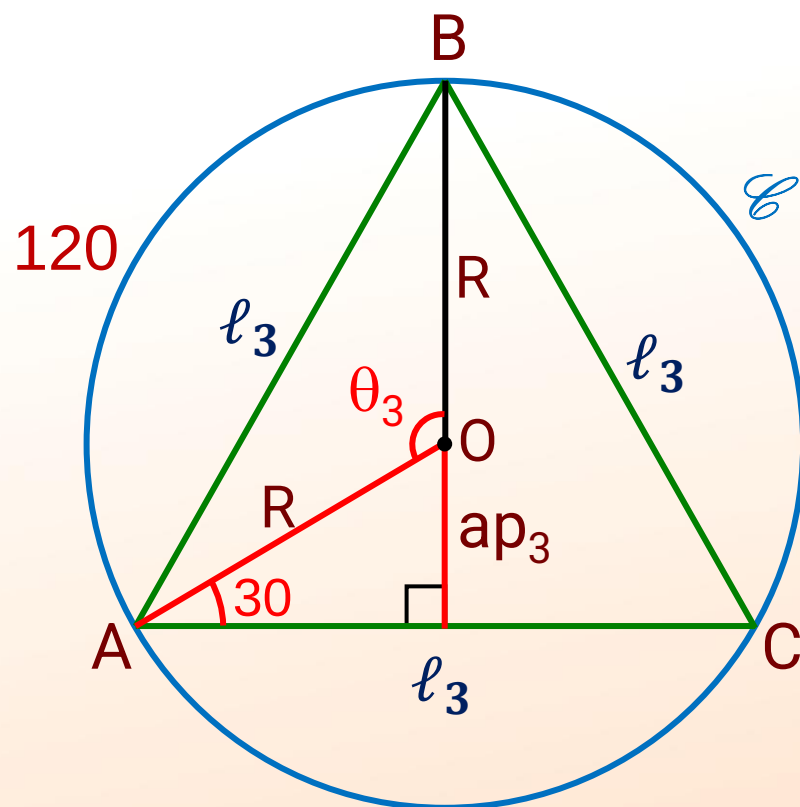
I_3, I_4, I_6, I_8 y I_{12}

**CICLO
PRE
2024-1**



TRIÁNGULO EQUILÁTERO

El triángulo equilátero ABC, está inscrito en la circunferencia de centro O y longitud del radio R.



Medida del ángulo central

$$\theta_3 = 120$$

Longitud del lado

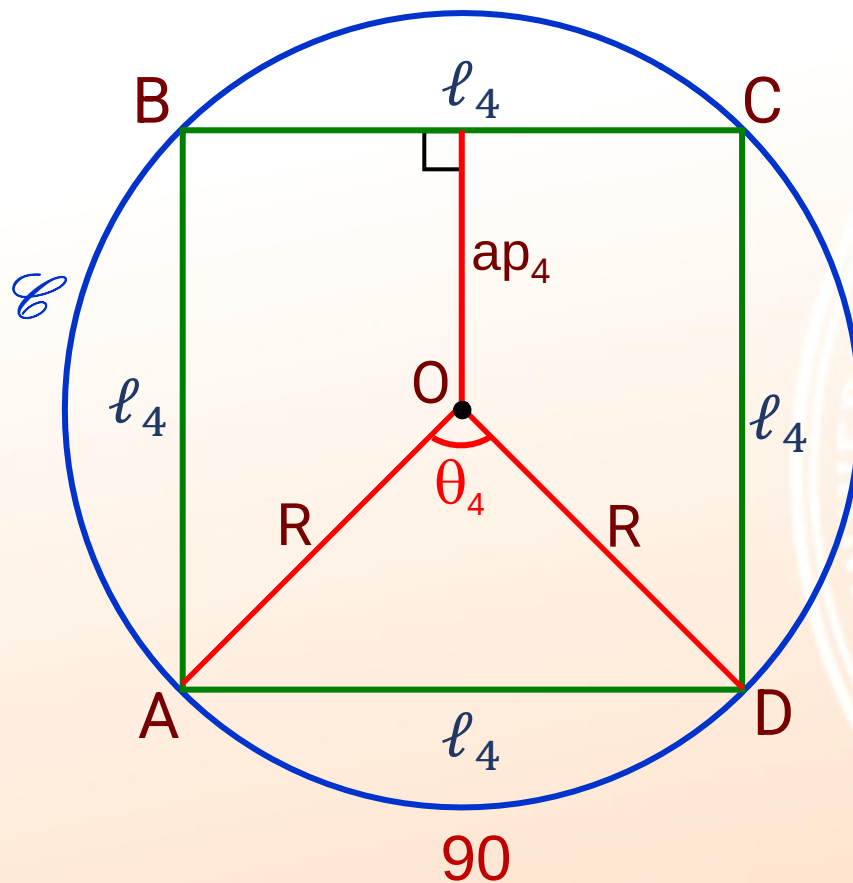
$$\ell_3 = R\sqrt{3}$$

Longitud de la apotema

$$ap_3 = \frac{R}{2}$$

CUADRADO

El cuadrado ABCD, está inscrito en la circunferencia de centro O y longitud del radio R.



Medida del ángulo central

$$\theta_4 = 90$$

Longitud del lado

$$l_4 = R\sqrt{2}$$

Longitud de la apotema

$$ap_4 = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

EJERCICIO 01

En un triángulo ABC, $\overline{CH}$ es una altura. Si la longitud de su circunradio es 6 u, $AB = 6\sqrt{3}$ u y $BC = 6\sqrt{2}$ u, entonces la distancia (en u) del punto H a $\overline{BC}$ es

A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B) $2\sqrt{2}$

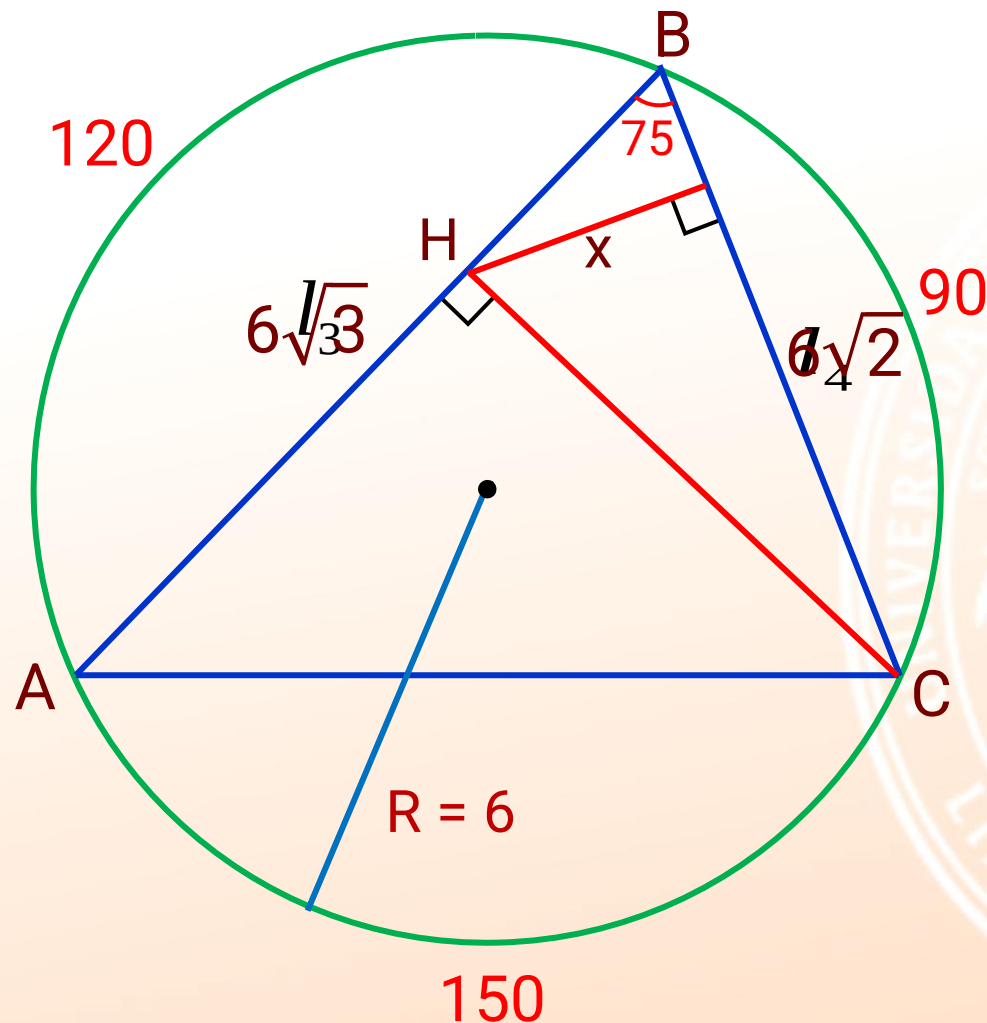
C) $\sqrt{2}$

D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

E) $3\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN 01

En un triángulo ABC, $\overline{CH}$ es una altura. Si la longitud de su circunradio es 6 u, $AB = 6\sqrt{3}$ u y $BC = 6\sqrt{2}$ u, entonces la distancia (en u) del punto H a $\overline{BC}$ es



De los datos se tiene:

$$AB = 6\sqrt{3} \rightarrow AB = R\sqrt{3} = l_3$$

$$BC = 6\sqrt{2} \rightarrow BC = R\sqrt{2} = l_4$$

$$m\widehat{AB} = 120 \quad \text{y} \quad m\widehat{BC} = 90$$

$$\text{Entonces } m\angle ABC = 75$$

$$\text{Luego: } \triangle BHC (15 \text{ y } 75)$$

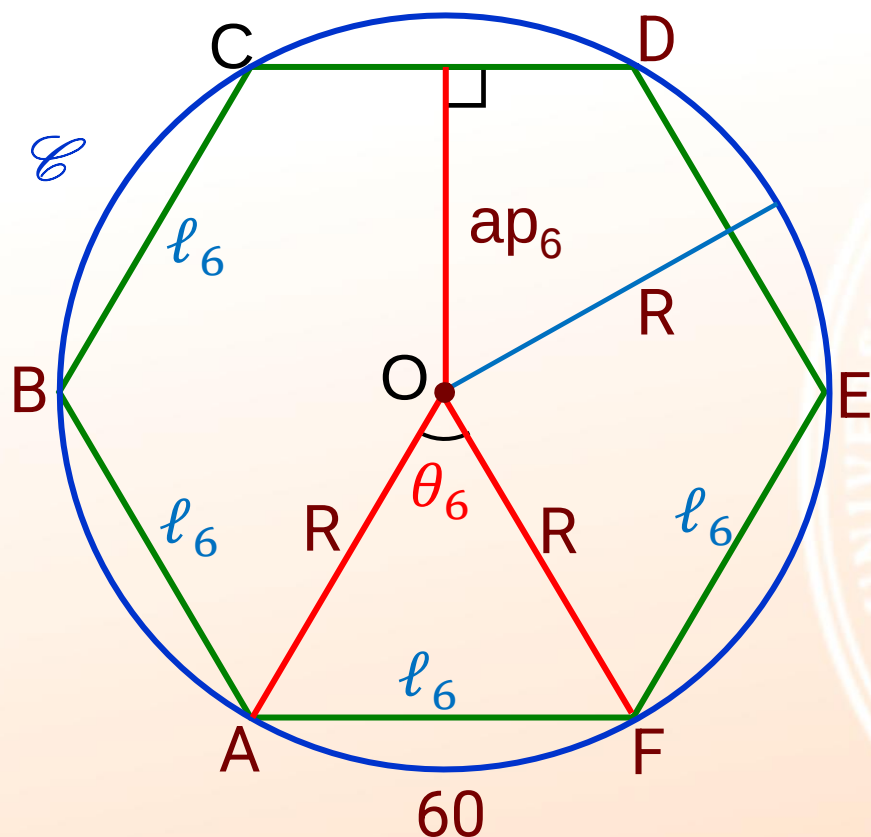
$$x = \frac{BC}{4}$$

$$\therefore x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Clave: A

HEXÁGONO REGULAR

El hexágono regular ABCDEF, está inscrito en la circunferencia de centro O y longitud del radio R.



Medida del ángulo central

$$\theta_6 = 60$$

Longitud del lado

$$l_6 = R$$

Longitud de la apotema

$$ap_6 = \frac{R}{2} \sqrt{3}$$

EJERCICIO 02

En un hexágono regular $ABCDEF$, $\overline{BP} \perp \overline{FC}$ ($P \in \overline{FC}$). Si $AB = 2u$, entonces la distancia (en u) de P a $\overline{FE}$ es

A) $2\sqrt{3}$

B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

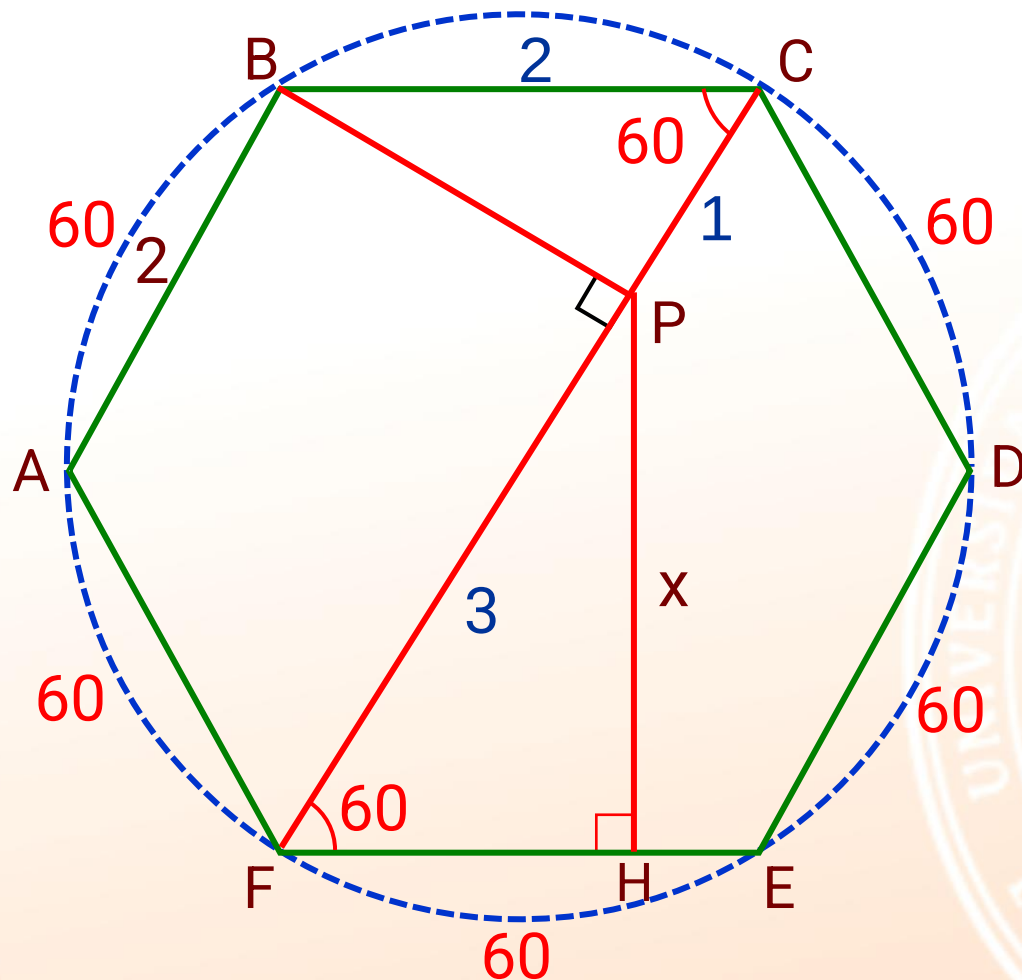
C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

E) $3\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN 02

En un hexágono regular $ABCDEF$, $\overline{BP} \perp \overline{FC}$ ($P \in \overline{FC}$). Si $AB = 2u$, entonces la distancia (en u) de P a $\overline{FE}$ es



De la figura, todos los arcos miden 60

$$\Rightarrow m\angle BCF = 60$$

$$\Delta BPC \text{ (30 y 60)}$$

$$PC = 1$$

CF es diámetro

$$AB = l_6 = R = 2$$

$$\text{entonces } CF = 4$$

$$\text{luego: } m\angle CFE = 60$$

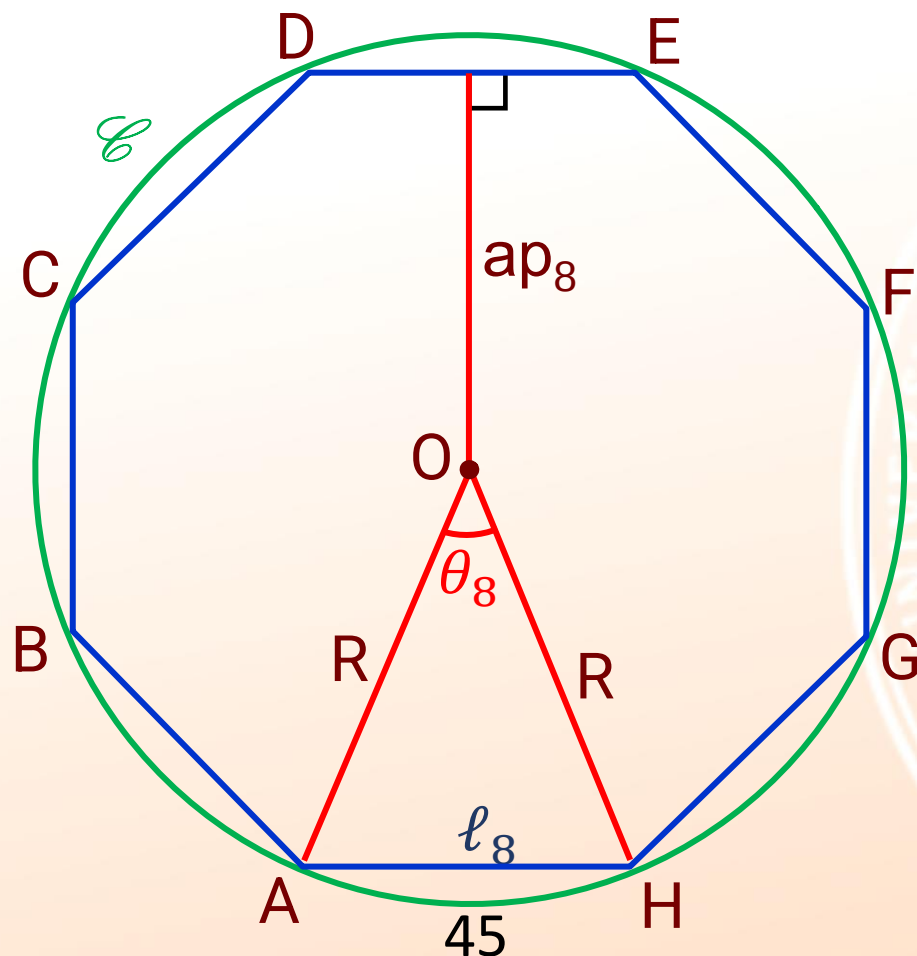
$$\Delta FHP \text{ (30 y 60)}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Clave: B

OCTÓGONO REGULAR

El octógono regular ABCDEFGH, está inscrito en la circunferencia de centro O y longitud del radio R.



Medida del ángulo central

$$\theta_8 = 45$$

Longitud del lado

$$\ell_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Longitud de la apotema

$$ap_8 = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

EJERCICIO 03

Los puntos A, B, C, D y E son vértices de un octógono regular, O es punto medio de $\overline{AE}$ y M es punto medio de $\overline{OD}$. Si $AE = 4$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AM}$ es

A) $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

B) $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$

C) $\sqrt{6 + 2\sqrt{2}}$

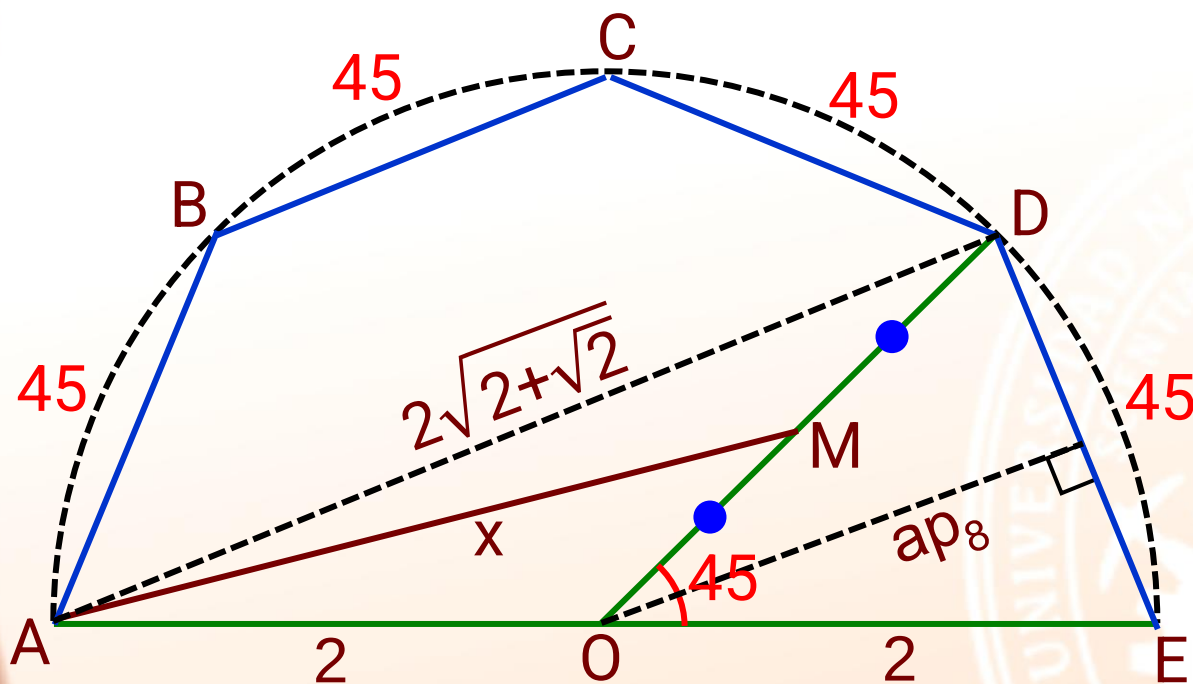
D) $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$

E) $2\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN 03

Los puntos A, B, C, D y E son vértices de un octógono regular, O es punto medio de $\overline{AE}$ y M es punto medio de $\overline{OD}$. Si $AE = 4$ u, entonces la longitud (en u) $\overline{AM}$ es

En la figura, todos los arcos miden 45°



$$ap_8 = \frac{R}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow ap_8 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$\triangle ADE$ (T.P.M.)

$$AD = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$\triangle AOD$ (T. de la mediana)

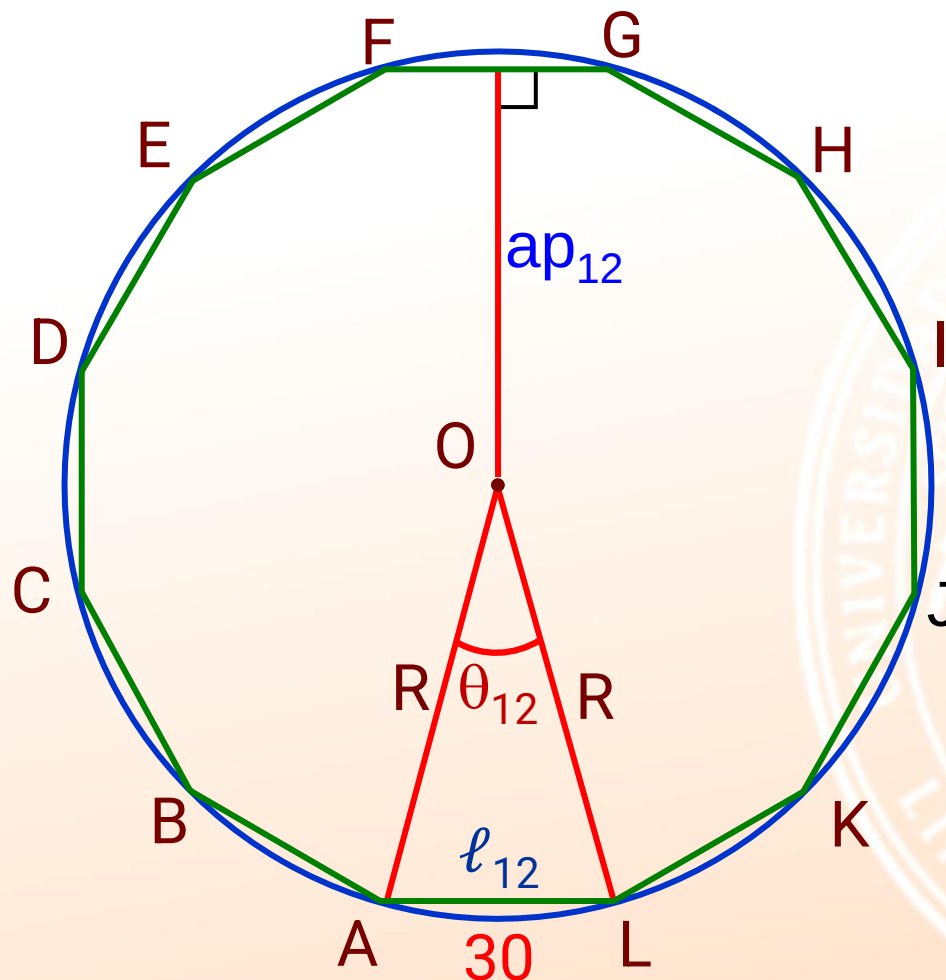
$$2^2 + (2\sqrt{2+\sqrt{2}})^2 = 2x^2 + \frac{(2)^2}{2}$$

$$x = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

Clave: A

DODECÁGONO REGULAR

El dodecágono regular ABCDEFGHIJKL, está inscrito en la circunferencia de centro O y longitud del radio R.



Medida del ángulo central

$$\theta_{12} = 30$$

Longitud del lado

$$\ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Longitud de la apotema

$$ap_{12} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

EJERCICIO 04

Los cuadrados ABCD y DEFG son congruentes y sus interiores son disjuntos. Se traza $\overline{AH} \perp \overline{EG}$ ($H \in \overline{EG}$). Si la longitud de lado de los cuadrados es ℓ y $m\angle CDE = 60$, entonces la longitud de $\overline{AH}$ es

A) $\frac{\ell}{2}\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$

B) $\frac{\ell}{4}\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$

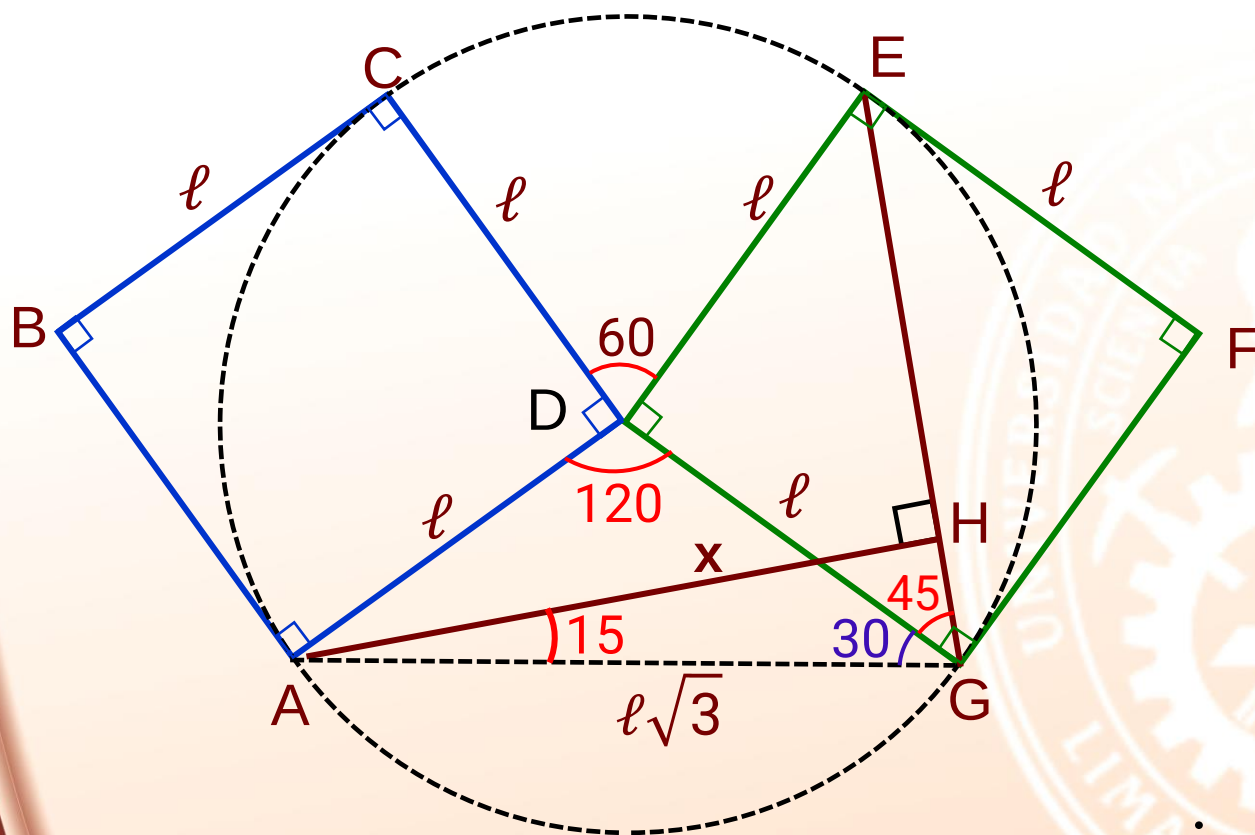
C) $\frac{\ell}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{3}}$

D) $\frac{\ell}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

E) $\frac{\ell}{4}\sqrt{6 - \sqrt{3}}$

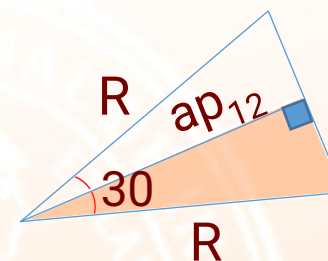
RESOLUCIÓN 04

Los cuadrados ABCD y DEFG son congruentes y sus interiores son disjuntos. Se traza $\overline{AH} \perp \overline{EG}$ ($H \in \overline{EG}$). Si la longitud de lado de los cuadrados es ℓ y $m\angle CDE = 60$, entonces la longitud de $\overline{AH}$ es



De la figura, $m\angle ADG = 120$

$$\Rightarrow AG = \ell_3 = \ell\sqrt{3}$$



$$ap_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Luego por relación de semejanza tenemos:

$$\frac{x}{\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{R}$$

$$\therefore x = \frac{\ell\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{2}$$

Clave: A



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI